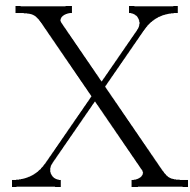




Enseignant-e-s: Dovi, Huruguen, Khukhro
Algèbre Linéaire - CMS
7 novembre 2023
Durée : 105 minutes



Contrôle 1 (Enoncé)

SCIPER: XXXXXX

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 11 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 27 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (1 point)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = x^2 + x + 4$. Que veut dire l'énoncé :

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 4 \neq y ?$$

- ☐ f est surjective
- ☐ Pour tout nombre réel x , il existe un nombre réel y tel que $f(x) \neq y$
- ☐ f n'est pas surjective
- ☐ $f(x) = 0$ n'a pas de solution

Question 2 (1 point)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Lequel des énoncés suivants est équivalent à l'énoncé " f est injective" ?

- ☐ $\forall x \in E, f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$
- ☐ $\forall x, x' \in E, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$
- ☐ $\forall x, x' \in E, f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$
- ☐ $\exists x \in E, f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$

Question 3 (1 point)

Laquelle des applications suivantes est injective ?

- ☐ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = (0, x^2 + 2x + 1)$
- ☐ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = (x^2, 2x^2 + 1)$
- ☐ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = (2x + 1, 2x + 1)$
- ☐ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = (x^2, x^2)$



Pour les **Questions 4, 5 et 6** ci-dessous on considère les propriétés P , Q et R suivantes portant sur $x \in \mathbb{N}$:

P : x est multiple de 2,

Q : x est multiple de 3,

R : x est multiple de 6.

Question 4 (2 points)

Laquelle des affirmations ci-dessous est vraie ?

☐ $\exists x \in \mathbb{N}, R \text{ et } \text{non}Q$

☐ $\forall x \in \mathbb{N}, (P \text{ ou } R) \implies Q$

☐ $\forall x \in \mathbb{N}, P \text{ ou } Q$

☐ $\forall x \in \mathbb{N}, (P \text{ et } Q) \implies R$

Question 5 (1 point)

Le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par la propriété caractéristique R est donné par :

☐ $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, x = 6k\}$

☐ $\{k \in \mathbb{N} \mid \forall x \in \mathbb{N}, x = 6k\}$

☐ $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{R}, x = 6k\}$

☐ $\{x \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}, x = 6k\}$

Question 6 (1 point)

Laquelle des affirmations suivantes est la réciproque de l'affirmation $\forall x \in \mathbb{N}, \text{non}P \implies R$?

☐ $\forall x \in \mathbb{N}, R \implies \text{non}P$

☐ $\exists x \in \mathbb{N}, \text{non}P \text{ et } \text{non}R$

☐ $\forall x \in \mathbb{N}, \text{non}R \implies P$

☐ $\forall x \in \mathbb{N}, P \implies \text{non}R$



Pour les **Questions 7, 8 et 9** ci-dessous on donne un ensemble fini E et un sous-ensemble $A \subset E$ vérifiant :

$$\text{Card}(E) = 14 \quad \text{et} \quad \text{Card}(A) = 3.$$

On donne aussi les coefficients suivants, figurant dans le triangle de Pascal :

$$\binom{11}{0} = 1 \quad \binom{11}{1} = 11 \quad \binom{11}{2} = 55 \quad \binom{11}{3} = 165 \quad \binom{11}{4} = 330 \quad \binom{11}{5} = 462.$$

Question 7 (2 points)

Combien existe-t-il de sous-ensembles B de E vérifiant :

$$\text{Card}(B) = 8 \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset ?$$

☐ 55

☐ 462

☐ 165

☐ 330

Question 8 (2 points)

Combien existe-t-il de sous-ensembles C de E vérifiant :

$$\text{Card}(C) = 6 \quad \text{et} \quad \text{Card}(A \cap C) = 2 ?$$

☐ 990

☐ 495

☐ 165

☐ 330

Question 9 (2 points)

Quelle est la valeur exacte de $\binom{12}{5} - \binom{12}{4}$?

☐ 132

☐ 297

☐ 275

☐ 165



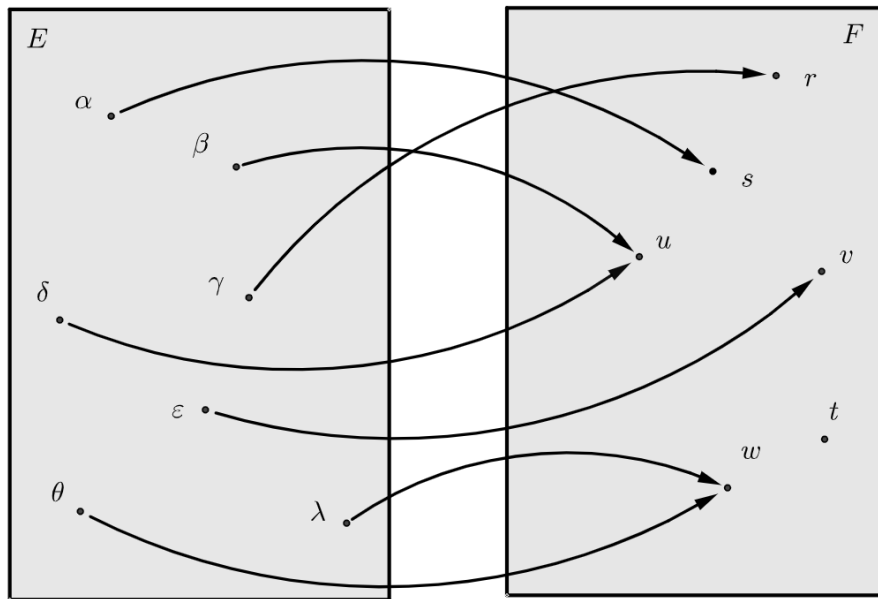
Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf indication contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: Cette question est notée sur 7 points.

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Soient les ensembles finis E et F et l'application $f : E \rightarrow F$ décrits par le dessin ci-dessous.



- (a) En détaillant votre démarche, déterminer le sous-ensemble $\mathbb{C}_F f(A)$ de F où :

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}.$$

- (b) Pour le sous-ensemble A de E donné au (a), est-il vrai ou faux de dire que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A ?$$

Justifier votre réponse.

- (c) Donner la définition de $f^{-1}(B)$ où B est un sous-ensemble de F .

- (d) En détaillant votre démarche, déterminer $f^{-1}(B)$ pour le sous-ensemble :

$$B = \{s, t, u, v, w\}.$$

- (e) Sans aucune justification, déterminer un sous-ensemble C de E possédant le moins possible d'éléments et tel que :

$$f(C) = f(f^{-1}(B)),$$

où B est le sous-ensemble de F défini au (d).

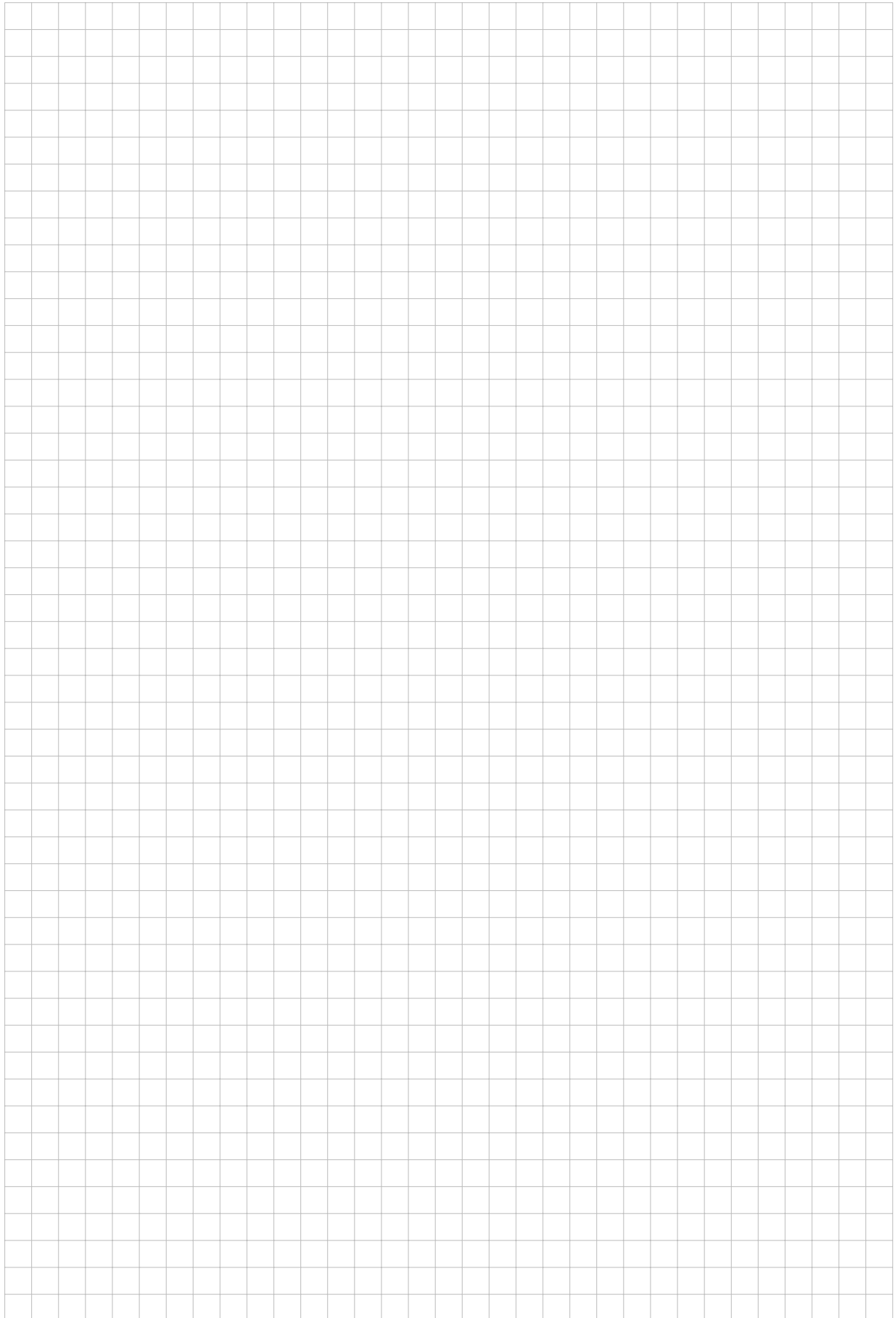
- (f) Sans aucune justification, définir une application :

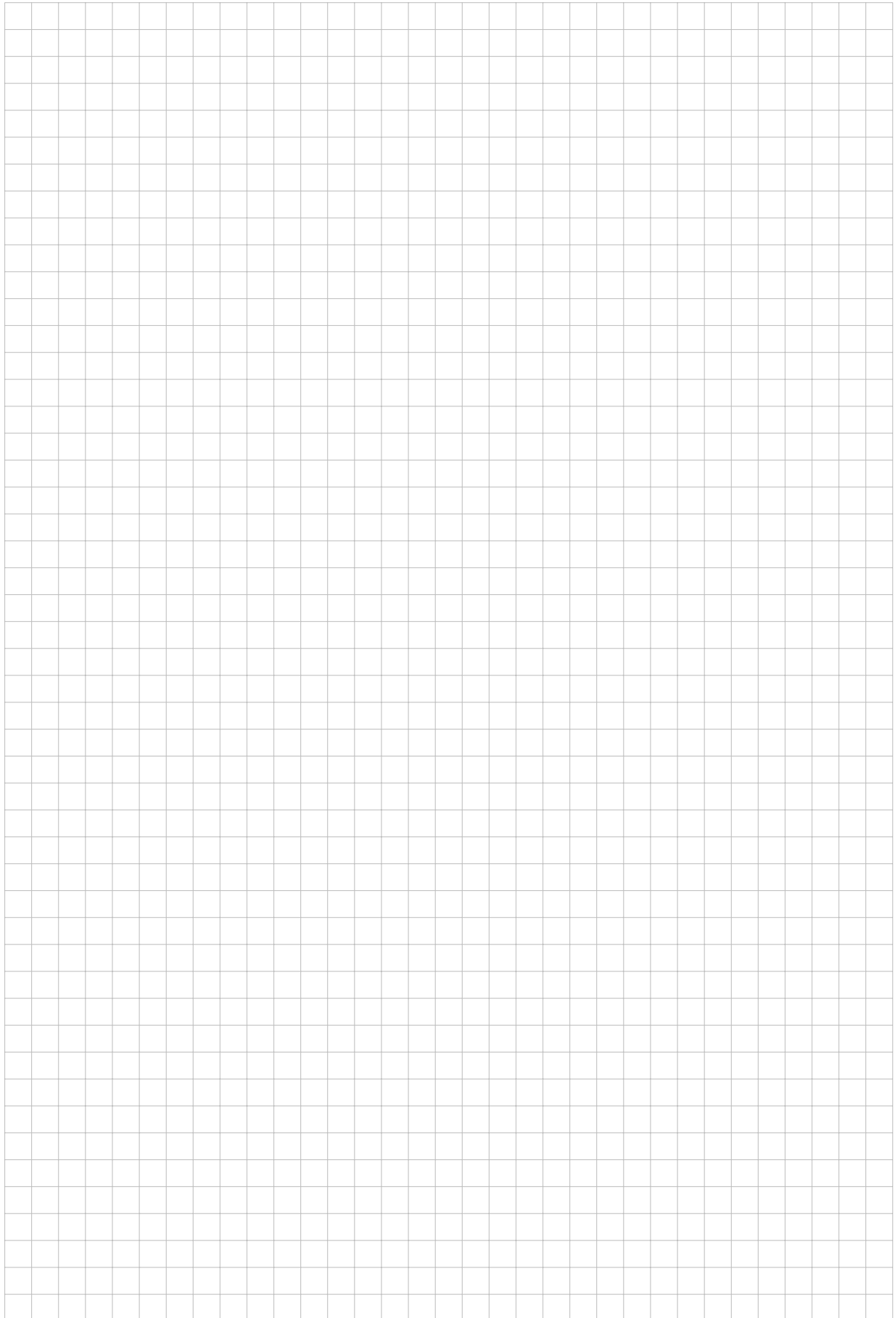
$$g : F \rightarrow E$$

telle que $\text{Im}(f \circ g)$ possède exactement deux éléments.



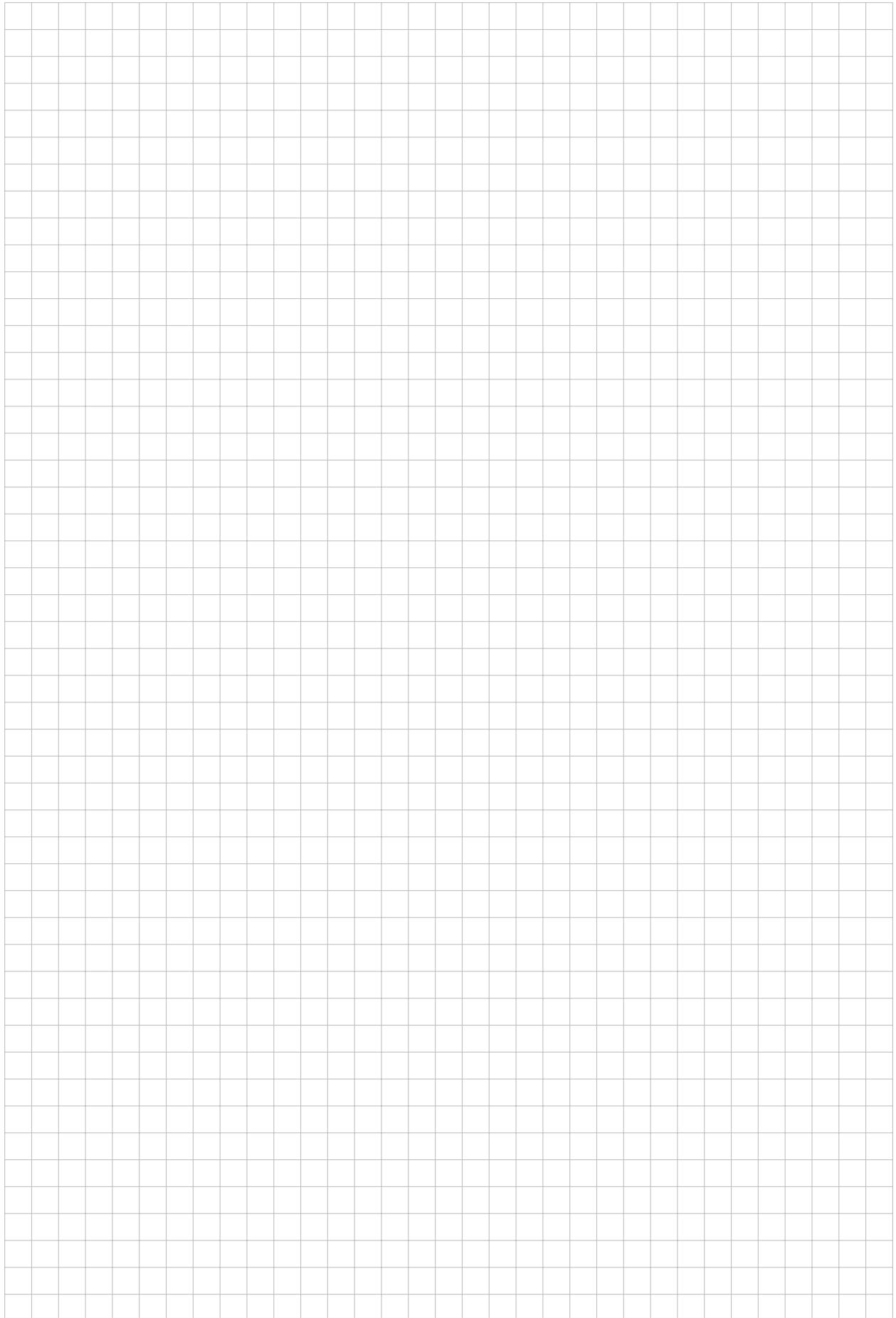
+1/6/55+







+1/8/53+





Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

	.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5
	0		1		2		3		4		5		6		7														

On considère l'application suivante :

$$f :] - \infty, 2[\cup] 2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2 - 1}{x - 2}.$$

- (a) Pour tout $x \in] - \infty, 2[\cup] 2, +\infty[$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. Combien a-t-il d'éléments ?
- (b) L'application f est-elle injective ? Justifier rigoureusement votre réponse.
- (c) Déterminer $\text{Im} f$.





+1/10/51+

